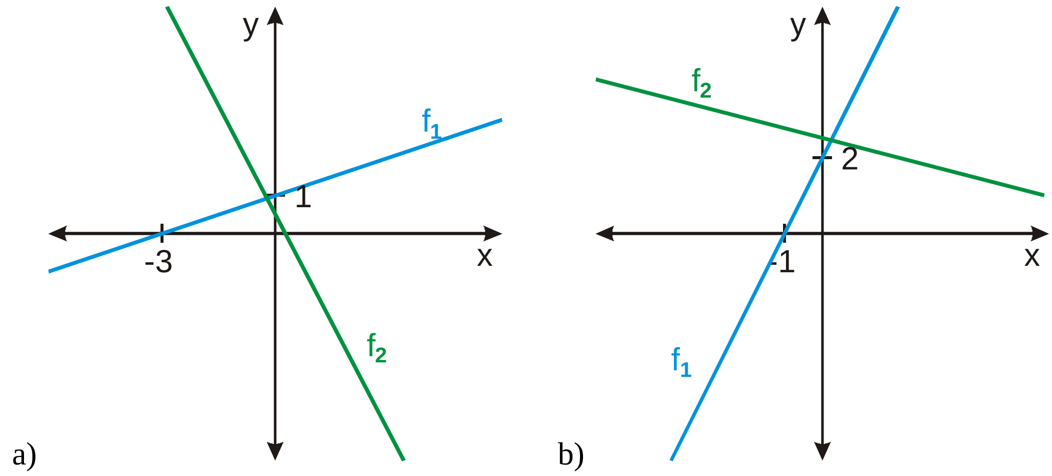
2.2.7 Soustavy lineárních nerovnic

Předpoklady: 2206

Pedagogická poznámka: První příklad je opakování, pokud se u někoho objeví problémy, je třeba je řešit před hodinou 020209.

Př. 1: Urči předpis funkce f_1. Odhadni předpis funkce f_2.



a)

f_1: Funkce prochází body:

- $[0,1] \Rightarrow b=1 \Rightarrow y=ax+1$,
- $[-3;0] \Rightarrow$ dosadíme do předpisu.

$0=a\cdot(-3)+1$

$3a=1$

$a=\frac{1}{3} \Rightarrow f_1:\ y=\frac{1}{3}x+1$

f_2: Funkce protíná osu y mezi 0 a 1, přibližně v polovině $\Rightarrow b \doteq \frac{1}{2}$.

Funkce je klesající, je strmější než přímka $y=x \Rightarrow a \doteq -2$.

$f_2:\ y \doteq -2x+\frac{1}{2}$

b)

f_1: Funkce prochází body:

- $[0,2] \Rightarrow b=2 \Rightarrow y=ax+2$,
- $[-1;0] \Rightarrow$ dosadíme do předpisu.

$a=2 \Rightarrow f_1:\ y=2x+2$

f_2: Funkce protíná osu y poměrně blízko nad číslem 2 $\Rightarrow b \doteq 2,5$.

Funkce je klesající, je méně strmá než přímka $y=x \Rightarrow a \doteq -\frac{1}{2}$.

$f_2:\ y \doteq -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

Nerovnice = podmínka, kterou musí splňovat čísla dosazovaná za neznámou.
Soustava nerovnic $\Rightarrow$ neznámá musí vyhovovat více nerovnicím (více podmínkám).
$\Rightarrow$ Budeme řešit jednotlivé nerovnice zvlášť a do konečného řešení vybereme čísla, která splňují všechny podmínky (tedy průnik řešení obou nerovnic).

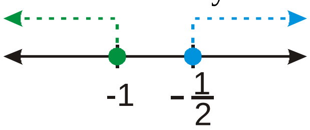
Př. 2: Vyřeš soustavu nerovnic $2x+2\leq 0$ $\quad 3x+1\geq 0$.

$$2x+2\leq 0$$
$$2x\leq -2$$
$$x\leq -1$$
$$K_1=(-\infty;-1\rangle$$

$$3x+1\geq 0$$
$$3x\geq -1$$
$$x\geq -\frac{1}{3}$$
$$K_2=\left\langle -\frac{1}{3};\infty\right)$$

$$K=K_1\cap K_2=(-\infty;-1\rangle\cap\left\langle -\frac{1}{3};\infty\right)=\emptyset$$

Obrázek může být názornější $\Rightarrow$ zobrazíme čísla na ose:



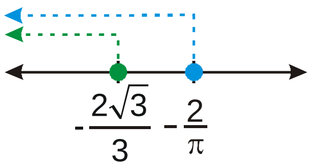
$K=\emptyset$

Př. 3: Vyřeš soustavu nerovnic $\sqrt{3}x+2\leq 0$ $\quad \pi x+2\leq 0$

$$\sqrt{3}x+2\leq 0$$
$$\sqrt{3}x\leq -2$$
$$x\leq -\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

$$\pi x+2\leq 0$$
$$\pi x\leq -2$$
$$x\leq -\frac{2}{\pi}$$

Zobrazíme čísla na ose:



$$K=\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\rangle$$

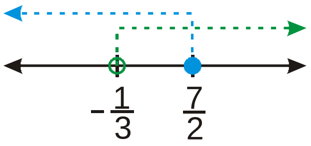
Poznámka: Podstatně hezčí je předchozí příklad v situaci, kdy studenti nemají kalkulačku. Musejí pak sami odhadnout, které z čísel je menší, aby je mohli správně umístit na číselnou osu. V této souvislosti je zajímavé, že místo usměrněného tvaru $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ je výhodnější tvar neusměrněný $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. Oba zlomky pak mají stejný čitatel a porovnáním jmenovatelů zjistíme, který je větší. Některé ze studentů splete i záporné znaménko.

Př. 4: Vyřeš soustavu nerovnic $2x-7\leq 0$ $\quad 3x+1>0$.

$$2x - 7 \le 0$$
$$2x \le 7$$
$$x \le \frac{7}{2}$$

$$3x + 1 > 0$$
$$3x > -1$$
$$x > -\frac{1}{3}$$

Zobrazíme čísla na ose:



$K = \left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{2}\right\rangle$

Př. 5: Vyřeš bez použití obrázků následující soustavy nerovnic:
a) $x > 1$ $\quad 3x \le -4$ b) $x < -2$ $\quad x \le 1$
c) $-3x \ge 2$ $\quad x \ge -3$

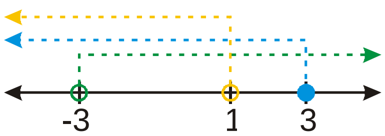
a)
$x > 1$
$3x \le -4 \;\Rightarrow\; x \le -\frac{4}{3}$
$K = \emptyset$

b)
$x < -2$
$x \le 1$
$K = (-\infty; -2)$

c)
$-3x \ge 2 \;\Rightarrow\; x \le -\frac{2}{3}$
$x \ge -3$
$K = \left\langle -3; -\frac{2}{3} \right\rangle$

Př. 6: Vyřeš soustavu nerovnic: $x \le 3$ $\quad x > -3$ $\quad x < 1$.

Tentokrát se obrázek bude hodit.



$K = (-3; 1)$

Pedagogická poznámka: Myslel jsem, že většina studentů sáhne po obrázku, ale téměř všichni příklad vyřešili zpaměti.

Př. 7: Vyřeš soustavu nerovnic.
a) $2x - 1 \le 3 - x < 3x + 3$ b) $2\left(x + \sqrt{2}\right) - 1 \ge 2x + 3 > 2 - 3x$

a) $2x - 1 \le 3 - x < 3x + 3$
Zápis představuje tři nerovnice:

- $2x - 1 \le 3 - x$,

- $3 - x < 3x + 3$,
- $2x - 1 < 3x + 3$ (tuto nerovnici řešit nemusíme, její platnost vyplývá z platnosti předchozích.

$2x - 1 \leq 3 - x \quad / +1$

$2x \leq 4 - x \quad / +x$

$3x \leq 4 \quad / :3$

$x \leq \frac{4}{3} \Rightarrow K_1 = \left(-\infty, \frac{4}{3}\right\rangle$

$3 - x < 3x + 3 \quad / +x$

$3 < 4x + 3 \quad / -3$

$0 < 4x \quad / :4$

$0 < x \Rightarrow K_2 = (0; \infty)$

$K = \left(0; \frac{4}{3}\right\rangle$

b) $2\left(x + \sqrt{2}\right) - 1 \geq 2x + 3 > 2 - 3x$

Zápis představuje tři nerovnice:

- $2\left(x + \sqrt{2}\right) - 1 \geq 2x + 3$,
- $2x + 3 > 2 - 3x$,
- $2\left(x + \sqrt{2}\right) - 1 > 2 - 3x$ (tuto nerovnici řešit nemusíme, její platnost vyplývá z platnosti předchozích)

$2\left(x + \sqrt{2}\right) - 1 \geq 2x + 3$

$2x + 2\sqrt{2} - 1 \geq 2x + 3 \quad / +1 - 2\sqrt{2}$

$2x \geq 2x + 4 - 2\sqrt{2} \quad / -2x$

$0x \geq 4 - 2\sqrt{2}$, protože

$4 - 2\sqrt{2} \doteq 4 - 2 \cdot 1{,}4 > 0$, nerovnice nemá řešení $\Rightarrow K_1 = \emptyset$

$2x + 3 > 2 - 3x$

Druhou rovnici nemá smysl řešit, protože první nerovnice nemá řešení a soustava tak řešení mít také nebude.

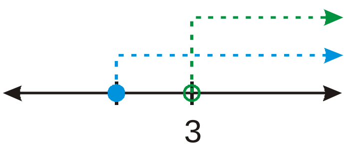
$K = \emptyset$

Př. 8: Je dána soustava dvou nerovnic $ax + b > 0$ a $cx + d \geq 0$. Doplň místo parametrů (písmen) libovolná čísla tak, aby řešením soustavy byla množina:

a) $(3; \infty)$ b) $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right\rangle$ c) $\left\langle -\frac{2}{3}; \sqrt{3}\right)$ d) $(-\infty; -2) \cup \langle 1; \infty)$

a) $(3; \infty)$

Pokud má být řešením interval $(3; \infty)$ musí řešení nerovnic na obrázku vypadat například takto:



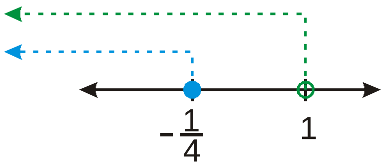
Řešení nerovnice $ax + b > 0$ (ostrá nerovnost) je zakresleno zeleně, řešení nerovnice $cx + d \geq 0$ je zakresleno modře $\Rightarrow$

- $x > 3 \Rightarrow ax + b = x - 3 > 0$ (v úvahu připadá i jakékoliv jiné dosazení, které vede po úpravách k nerovnici $x > 3$, například $2x - 6 > 0$),
- $x \geq 2$ (například) $\Rightarrow cx + d = x - 2 \geq 0$ (v úvahu připadá i jakékoliv jiné dosazení, které vede po úpravách k nerovnici $x \geq k$, kde k je libovolné číslo menší nebo rovno

3, například $0{,}5x+1\geq 0$, nebo dosazení, které vede na řešení $K=R$, například $0x+1\geq 0$).

b) $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right\rangle$

Pokud má být řešením interval $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right\rangle$ musí řešení nerovnic na obrázku vypadat například takto:

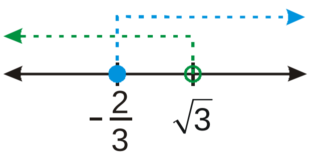


Řešení nerovnice $ax+b>0$ (ostrá nerovnost) je zakresleno zeleně, řešení nerovnice $cx+d\geq 0$ je zakresleno modře $\Rightarrow$

- $x\leq -\frac{1}{4} \Rightarrow cx+d=-4x-1\geq 0$ (v úvahu připadá i jakékoliv jiné dosazení, které vede po úpravách k nerovnici $-\frac{1}{4}\geq x$, například $-2x-\frac{1}{2}\geq 0$),
- $x<1$ (například) $\Rightarrow ax+b=-x+1>0$ (v úvahu připadá i jakékoliv jiné dosazení, které vede po úpravách k nerovnici $x<k$, kde $k>-\frac{1}{4}$, například $-x-\frac{1}{8}>0$, nebo dosazení, které vede k řešení $K=R$ například $0x+5>0$).

c) $\left\langle -\frac{2}{3};\sqrt{3}\right)$

Pokud má být řešením interval $\left\langle -\frac{2}{3};\sqrt{3}\right)$ musí řešení nerovnic na obrázku vypadat takto:

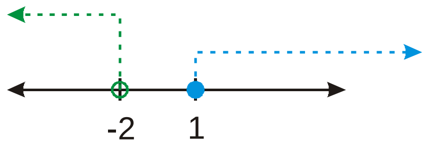


Řešení nerovnice $ax+b>0$ (ostrá nerovnost) je zakresleno zeleně, řešení nerovnice $cx+d\geq 0$ je zakresleno modře $\Rightarrow$

- $x\geq -\frac{2}{3} \Rightarrow cx+d=3x+2\geq 0$ (v úvahu připadá i jakékoliv jiné dosazení, které vede po úpravách k nerovnici $x\geq -\frac{2}{3}$, například $6x+4\geq 0$),
- $x<\sqrt{3} \Rightarrow ax+b=-x+\sqrt{3}>0$ (v úvahu připadá i jakékoliv jiné dosazení, které vede po úpravách k nerovnici $x<\sqrt{3}$, například $-2x+2\sqrt{3}>0$),

d) $(-\infty;-2)\cup\langle 1;\infty)$

Tato množina nemůže být nikdy řešením soustavy lineárních nerovnic. Zakreslíme části zadané množiny tak, jako by byly řešením jedné z nerovnic.



Každý z intervalu je řešením jedné z nerovnic, ale řešením této soustavy je prázdná množina.

Př. 9: Najdi všechny možnosti, jak může vypadat řešení soustavy dvou lineárních nerovnic s ostrou nerovností. U každé možnosti uveď příklad.

Typ řešení	Příklad
$K=\emptyset$	$x>1$, $x<0$
$K=(-\infty;a)$	$x<2$, $x<3$
$K=(a;b)$	$x>2$, $x<3$
$K=(a;\infty)$	$x>2$, $x>5$
$K=R$	$0x<2$, $0x>-3$

Pedagogická poznámka: Následující příklad je určen pouze nejlepším žákům, rozhodně ho neukazuji většině třídy.

Př. 10: Vyřeš soustavu nerovnic s parametrem $2x+a<x+3$, $a-3x<3a+x$.

$2x+a<x+3 \quad /-a$

$2x<x+3-a \quad /-x$

$x<3-a \;\Rightarrow\; K_1=(-\infty;3-a)$

$a-3x<3a+x \quad /+3x$

$a<3a+4x \quad /-3a$

$-2a<4x \quad /:4$

$-\dfrac{a}{2}<x \;\Rightarrow\; K_2=\left(-\dfrac{a}{2};\infty\right)$

$K=\left(-\dfrac{a}{2};3-a\right)$ musí však platit, že $-\dfrac{a}{2}<3-a$ (aby měl zápis intervalu smysl) $\Rightarrow$ dopočítáme, co tato podmínka znamená pro *a*:

$-\dfrac{a}{2}<3-a \quad /\cdot 2$

$-a<6-2a \quad /+2a$

$a<6$

Pokud je $a<6$, je řešením soustavy interval $\left(-\dfrac{a}{2};3-a\right)$. Pokud je $a\geq 6$, soustava řešení nemá.

Př. 11: Petáková:
strana 18/cvičení 38 a) b) c)

Shrnutí: Při řešení soustavy nerovnic hledáme hodnoty neznámé, které musí splnit najednou více podmínek (více nerovnic).